독립심화학습 14주차

2017103580 사회학과 김정운

Min subject to …(1)을 만족하는 최적해 x\*에 대한 필요조건을 구할 때, admissible state set의 원소들이 모두 C1-continuous이라는 것을 전재로 했다. 왜냐하면 오일러 방정식과 르장드르 필요조건이 도함수나 이계도함수를 사용하기 때문이다. 하지만 현실에서 x가 항상 미분가능하다는 것을 보장할 수 없는데, 주식가격을 예시로 들 수 있다. 브라운 운동으로 주식가격을 모델링 하는데, 해당 함수는 연속이지만 항상 미분이 불가능하다. 이처럼 state x가 미분불가능인 상황에서 기존의 오일러 방정식을 쓸 수 없다. 이로 인해 필요조건은 오일러 방정식의 적분형 “”을 사용해야 하는데, 이때 x는 립시츠 함수이여야만 한다. x가 립시츠 함수이면 연속일 뿐만 아니라, 도함수를 a.e하게 정의할 수 있고 essentially bounded하기 때문이다.

일부 정리들은 state에 대한 추가적인 정보를 제공하는데, x가 립시츠 함수이고 (1)문제를 푼다고 가정하자. x\*가 적분형태의 오일러 방정식을 만족하고 가 임의의 x’(t)에 대해 a.e하게 strictly convex 하면, x\*는 C1([a,b])의 원소가 된다. 이에 대한 증명은 생략하겠지만, 여기서 주목해야 하는 것은 가 x가 고정되어 있고 x’에 대해 convex하다는 것이다. Convex에 대한 세부적인 내용은 문제에 따라서 약간씩 다를 수 있지만, 필요조건을 만족하는 state가 최적이라는 것을 보장하기 위해 필요한 조건이다. 이전에도 언급했지만, convex는 최적해의 존재성을 진술할 때 필요한 조건이다. 그리고 x가 optimal state이면, 이 모든 v에 대해 성립해야 한다.

변분법에서 해의 존재성을 증명하기 위해서는 state가 절대연속이어야 한다. 어떤 함수 x가 [a,b]에서 절대연속이라는 것은 “임의의 d에 대해 [a,b]에서 유한개의 (xi,yi) s.t sum(|ai-bi|)<c이면, sum(x(ai)-x(bi))<d가 성립하는 c가 존재한다”을 의미한다. 즉, 절대연속은 연속의 정의를 일반화한 것이다. 또한 라그랑지안 가 x’에 대해 convex이고 가 성립하는 양수 r가 존대하면, [a,b]에서 절대연속인 optimal state가 존재한다(Tonelli, 1915). 이에 대한 증명도 자세히 다룰지는 않겠지만, x’에 대한 가정이 증명에서 중요하게 사용된다. x’이 유계이고 가 연속이기 때문에 를 만족하는 수열 (xi)가 볼자노-바이스트러스 정리(?)로 인해 존재하게 된다. 그리고 x’이 유계이기 때문에 x’이 약하게 수렴하는데, 약한 수렴은 적분을 이용하여 정의된 수렴이다. 이들을 종합하면 integral semicontinuity theorem으로 인해 global minimizer가 존재하다는 것을 증명할 수 있다. Integral semicontinuity theorem이란 “xi가 x로 수렴하고 ui가 u로 약하게 수렴하면, J(x,u)<=inf(J(xi,ui)가 성립한다”이다.

마지막으로 differential inclusion(이하 DI)을 소개하려고 하는데, DI은 미분방정식을 일반화한 개념이다. 기존의 미분방정식은 함수의 정의상 정의역의 모든 원소는 한 개의 값으로만 대응되는데, DI는 multifunction을 사용하여 하나의 값을 집합으로 대응시킨다. multifunction은 원소에서 집합으로 대응시킨다는 점에서, 해당 개념을 현실의 문제를 모델링하는데 사용되지 않는다. 하지만 수학적인 개념을 증명하는데 사용되는데, 이에 대해서는 다음에 자세히 논의하려고 한다.